



Uravnoreženo iskalno 2-3 drevo

Domen Gaberšček

Univerza v Ljubljani, FMF, matematika

FMF, matematika – Praktična matematika
Ljubljana, februar 2016



Kaj je 2-3 drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri



Kaj je 2-3 drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

- drevesna struktura



Kaj je 2-3 drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

- drevesna struktura
- iskalno drevo



Kaj je 2-3 drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

- drevesna struktura
- iskalno drevo
- uravnoteženo drevo (popolnoma poravnano)



Kaj je 2-3 drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

- drevesna struktura
- iskalno drevo
- uravnoteženo drevo (popolnoma poravnano)
- vstavljanje/brisanje elementov



Kaj je 2-3 drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

- drevesna struktura
- iskalno drevo
- uravnoteženo drevo (popolnoma poravnano)
- vstavljanje/brisanje elementov
- John Hopcroft 1970



Definicija 2-3 drevesa

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri



Definicija 2-3 drevesa

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

- elementi shranjeni le v listih drevesa



Definicija 2-3 drevesa

- elementi shranjeni le v listih drevesa
- vozlišče ima 1 ključ in 2 sinova ali 2 ključa in 3 sinove. Prvi ključ je najmanjši element v drugem poddrevesu, drugi ključ je najmanjši element v tretjem poddrevesu



Definicija 2-3 drevesa

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

- elementi shranjeni le v listih drevesa
- vozlišče ima 1 ključ in 2 sinova ali 2 ključa in 3 sinove. Prvi ključ je najmanjši element v drugem poddrevesu, drugi ključ je najmanjši element v tretjem poddrevesu
- vsi listi so na istem nivoju



Definicija 2-3 drevesa

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

- elementi shranjeni le v listih drevesa
- vozlišče ima 1 ključ in 2 sinova ali 2 ključa in 3 sinove. Prvi ključ je najmanjši element v drugem poddrevesu, drugi ključ je najmanjši element v tretjem poddrevesu
- vsi listi so na istem nivoju
- levo in desno poddrevo sta 2-3 drevesi



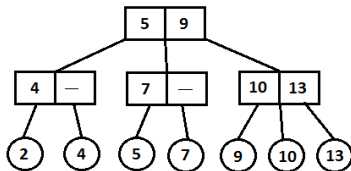
Definicija 2-3 drevesa

- elementi shranjeni le v listih drevesa
- vozlišče ima 1 ključ in 2 sinova ali 2 ključa in 3 sinove. Prvi ključ je najmanjši element v drugem poddrevesu, drugi ključ je najmanjši element v tretjem poddrevesu
- vsi listi so na istem nivoju
- levo in desno poddrevo sta 2-3 drevesi
- prazno drevo in drevo z enim vozliščem je tudi 2-3 drevo



Definicija 2-3 drevesa

- elementi shranjeni le v listih drevesa
- vozlišče ima 1 ključ in 2 sinova ali 2 ključa in 3 sinove. Prvi ključ je najmanjši element v drugem poddrevesu, drugi ključ je najmanjši element v tretjem poddrevesu
- vsi listi so na istem nivoju
- levo in desno poddrevo sta 2-3 drevesi
- prazno drevo in drevo z enim vozliščem je tudi 2-3 drevo



Slika: Primer 2-3 drevesa



Iskanje po drevesu

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Iščemo element x



Iskanje po drevesu

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Iščemo element x

Ključ (k) ima dva sinova ($s1, s2$):

- $x < k \Rightarrow s1$
- $x > k \Rightarrow s2$



Iskanje po drevesu

Iščemo element x

Ključ (k) ima dva sinova (s_1, s_2):

- $x < k \Rightarrow s_1$
- $x > k \Rightarrow s_2$

Ključ ($k_1 < k_2$) ima tri sinove (s_1, s_2, s_3):

- $x < k_1 \Rightarrow s_1$
- $k_1 < x < k_2 \Rightarrow s_2$
- $k_2 < x \Rightarrow s_3$



Iskanje po drevesu

Računalništvo

1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Iščemo element x

Ključ (k) ima dva sinova (s_1, s_2):

- $x < k \Rightarrow s_1$
- $x > k \Rightarrow s_2$

Ključ ($k_1 < k_2$) ima tri sinove (s_1, s_2, s_3):

- $x < k_1 \Rightarrow s_1$
- $k_1 < x < k_2 \Rightarrow s_2$
- $k_2 < x \Rightarrow s_3$



Iskanje po drevesu

Računalništvo
1

D. Gaberšček

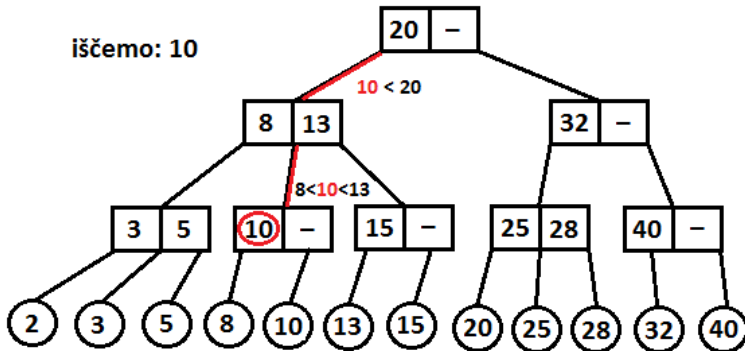
Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri



Slika: Primer iskanja



Vstavljanje v drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri



Vstavljanje v drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo ustrezno mesto



Vstavljanje v drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo ustrezno mesto

Oče ima samo 2 sinova \Rightarrow ga vrinemo in popravimo ključ



Vstavljanje v drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo ustrezno mesto

Oče ima samo 2 sinova \Rightarrow ga vrinemo in popravimo ključ

Oče že ima 3 sinove



Vstavljanje v drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo ustrezno mesto

Oče ima samo 2 sinova \Rightarrow ga vrinemo in popravimo ključ

Oče že ima 3 sinove

- Dodamo novo vozlišče (strica)



Vstavljanje v drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo ustrezno mesto

Oče ima samo 2 sinova \Rightarrow ga vrinemo in popravimo ključ

Oče že ima 3 sinove

- Dodamo novo vozlišče (strica)
- Oče in stric si razdelita vsak 2 sinova



Vstavljanje v drevo

Računalništvo

1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo ustrezno mesto

Oče ima samo 2 sinova \Rightarrow ga vrinemo in popravimo ključ

Oče že ima 3 sinove

- Dodamo novo vozlišče (strica)
- Oče in stric si razdelita vsak 2 sinova
- Očeta in strica dodamo staremu očetu



Primer vstavljanja

Računalništvo
1

D. Gaberšček

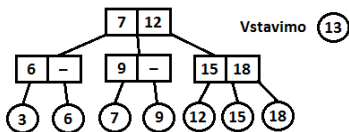
Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri





Primer vstavljanja

Računalništvo
1

D. Gaberšček

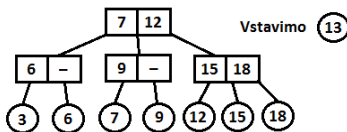
Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri





Primer vstavljanja

Računalništvo

1

D. Gaberšček

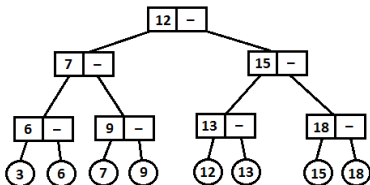
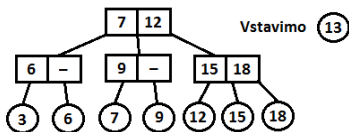
Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri





Brisanje elementov

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo element in ga zberišemo



Brisanje elementov

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo element in ga zberemo
Očetu ostaneta 2 sinova \Rightarrow popravimo ključe



Brisanje elementov

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo element in ga zberšemo

Očetu ostaneta 2 sinova \Rightarrow popravimo ključe

Očetu ostane 1 sin



Brisanje elementov

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo element in ga zberšemo

Očetu ostaneta 2 sinova \Rightarrow popravimo ključe

Očetu ostane 1 sin

- vsaj en stric 3 sinove \Rightarrow priključimo stričevega sina očetu



Brisanje elementov

Računalništvo

1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Poiščemo element in ga zberšemo

Očetu ostaneta 2 sinova \Rightarrow popravimo ključe

Očetu ostane 1 sin

- vsaj en stric 3 sinove \Rightarrow priključimo stričevega sina očetu
- noben stric nima 3 sinov \Rightarrow osamljenega sina priključimo stricu, očeta zberšemo



Primer brisanja

Računalništvo
1

D. Gaberšček

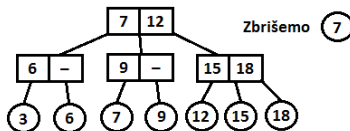
Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri





Primer brisanja

Računalništvo
1

D. Gaberšček

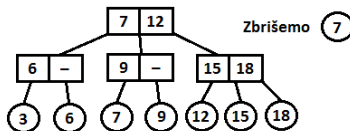
Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri





Primer brisanja

Računalništvo
1

D. Gaberšček

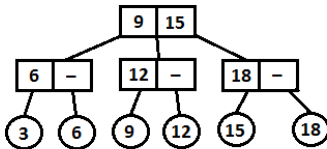
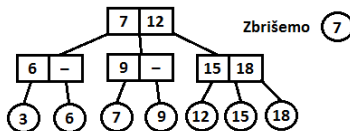
Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri





Kako zgraditi drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Primer podatkov: 53,4,63,29,92,27,66,52,83



Kako zgraditi drevo

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

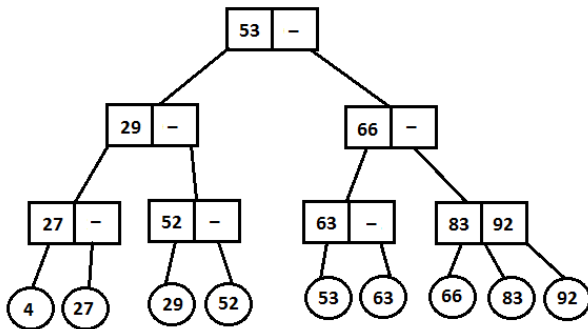
Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri

Primer podatkov: 53,4,63,29,92,27,66,52,83





Viri

Računalništvo
1

D. Gaberšček

Uvod

Definicija

Operacije v
drevesu

Uporaba

Viri



<http://cs.engr.uky.edu/~lewis/essays/algorithms/2-3trees/trees2-3.html>



<http://www.aihorizon.com/essays/basiccs/trees/twothree.htm>



http://wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/2-3_drevo



http://www.webalice.it/gundam_1973/2-3.html